

2012 年全国大学生数学竞赛数学类试题

1、(15 分) 设 Γ 为椭圆抛物面 $z = 3x^2 + 4y^2 + 1$, 从原点作 Γ 的切平面, 求切锥面方程。

2、(15 分) 设 Γ 为抛物线, P 是与焦点位于抛物线同侧的一点, 过 P 的直线与 Γ 围成的有界区域的面积记为 $A(L)$ 。证明: $A(L)$ 取最小值当且仅当 P 恰为 L 被 Γ 所截出的线段的中点。

3、(10 分) 设 $f \in C^1[0, \infty)$, $f(0) > 0$, $f'(x) \geq 0$, 对任意 $x \in [0, \infty)$, 若

$$\int_0^\infty \frac{dx}{f(x) + f'(x)} < +\infty, \text{ 求证: } \int_0^\infty \frac{dx}{f(x)} < +\infty。$$

4、(10 分) 设 $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, 均为实 n 阶正定矩阵, $P(t) = \mathbf{A}t^2 + \mathbf{B}t + \mathbf{C}$, $f(t) = \det P(t)$,

其中 t 为未定元, $\det P(t)$ 表示 $P(t)$ 的行列式, 若 λ 为 $f(t)$ 的根, 证明: λ 的实部为负数。

5、(10 分) $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3} = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$, $|x| < 1$, n 是正整数, 求 $\sum_{i=0}^{n-1} a_i$ 。

6、(15 分) 设 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 可微, 其中 $\mathbb{R}$ 为实数集, 已知 $f(0) = f(1)$, 且 $\int_0^1 f(x) dx = 0$,

且对任意 $x \in [0, 1]$, 有 $f(x) \neq 1$, 求证: 对任意正整数 n , 有 $|\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})| < \frac{1}{2}$ 。

7、(25 分) 已知实矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 4 & b \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, 证明:

(1) 矩阵方程 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 有解但 $\mathbf{BY} = \mathbf{A}$ 无解的充要条件是 $\begin{cases} a \neq 2 \\ b = \frac{4}{3} \end{cases}$ 。

(2) $\mathbf{A}$ 相似于 $\mathbf{B}$ 的充要条件是 $\begin{cases} a = 3 \\ b = \frac{2}{3} \end{cases}$ 。

(3) $\mathbf{A}$ 合同于 $\mathbf{B}$ 的充要条件是 $\begin{cases} a < 2 \\ b = 3 \end{cases}$ 。