

试题解答

1: (15分) 设 Γ 为椭圆抛物面 $z = 3x^2 + 4y^2 + 1$. 从原点作 Γ 的切锥面. 求切锥面方程.

解答: 设 (x, y, z) 为切锥面上的点 (非原点). 存在唯一 t 使得 $t(x, y, z)$ 落在椭圆抛物面上 (5分). 于是有 $tz = (3x^2 + 4y^2)t^2 + 1$, 并且这个关于 t 的二次方程只有一个根 (10分). 于是, 判别式

$$\Delta = z^2 - 4(3x^2 + 4y^2) = 0.$$

这就是所求的切锥面方程 (15分). $\square$

2: (15分) 设 Γ 为抛物线, P 是与焦点位于抛物线同侧的一点. 过 P 的直线 L 与 Γ 围成的有界区域的面积记为 $A(L)$. 证明: $A(L)$ 取最小值当且仅当 P 恰为 L 被 Γ 所截出的线段的中点.

解答: 不妨设抛物线方程为 $y = x^2$, $P = (x_0, y_0)$ (1分). P 与焦点在抛物线的同侧, 则 $y_0 > x_0^2$ (2分). 设 L 的方程为 $y = k(x - x_0) + y_0$. L 与 Γ 的交点的 x 坐标满足 $x^2 = k(x - x_0) + y_0$, 有两个解 $x_1 < x_2$ 满足

$$x_1 + x_2 = k, \quad x_1 x_2 = kx_0 - y_0$$

(6分). L 与 x 轴, $x = x_1$, $x = x_2$ 构成的梯形面积 $D = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)(x_2 - x_1)$, 抛物线与 x 轴, $x = x_1$, $x = x_2$ 构成区域的面积为 $\int_{x_1}^{x_2} x^2 dx = \frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3)$ (8分). 于是有

$$A(L) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)(x_2 - x_1) - \frac{1}{3}(x_2^3 - x_1^3) = \frac{1}{6}(x_2 - x_1)^3$$

$$\begin{aligned} 36A(L)^2 &= (x_2 - x_1)^6 = ((x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2)^3 = (k^2 - 4kx_0 + 4y_0)^3 \\ &= ((k - 2x_0)^2 + 4(y_0 - x_0^2))^3 \geq 64(y_0 - x_0^2)^3. \end{aligned}$$

(12分), 等式成立当且仅当 $A(L)$ 取最小值, 当且仅当 $k = 2x_0$, 即 $x_1 + x_2 = 2x_0$ (15分). $\square$

3: (10分) 设 $f \in C^1[0, +\infty)$, $f(0) > 0$, $f'(x) \geq 0 \forall x \in [0, +\infty)$. 已知 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{f(x)+f'(x)} dx < +\infty$, 求证: $\int_0^{+\infty} \frac{1}{f(x)} dx < +\infty$.

解答: 由于 $f'(x) \geq 0$, 有

$$0 \leq \int_0^N \frac{1}{f(x)} dx - \int_0^N \frac{1}{f(x) + f'(x)} dx = \int_0^N \frac{f'(x)}{f(x)(f(x) + f'(x))} dx$$

(1 分). 取极限

$$\begin{aligned}\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^N \frac{f'(x)}{f(x)(f(x) + f'(x))} dx &\leq \lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^N \frac{f'(x)}{f(x)^2} dx \\ &= \lim_{N \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{f(x)}\right) \Big|_0^N \leq \frac{1}{f(0)}\end{aligned}$$

(8 分). 故由已知条件有

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{f(x)} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{f(x) + f'(x)} dx + \frac{1}{f(0)} < +\infty$$

(10 分).

4: (10 分) 设 A, B, C 均为实 n 阶正定矩阵, $P(t) = At^2 + Bt + C$, $f(t) = \det P(t)$, 其中 t 为未定元, $\det P(t)$ 表示 $P(t)$ 的行列式. 若 λ 为 $f(t)$ 的根, 试证明: $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$, 这里 $\operatorname{Re}(\lambda)$ 表示 λ 的实部.

解答: 设 λ 为 $f(t)$ 的根, 则有 $\det P(t) = 0$, 从而 $P(t)$ 的 n 个列线性相关. 于是存在 $\alpha \neq 0$ 使得 $P(\lambda)\alpha = 0$, 进而 $\alpha^* P(\lambda)\alpha = 0$. (4 分)
具体地,

$$\alpha^* A \alpha \lambda^2 + \alpha^* B \alpha \lambda + \alpha^* C \alpha = 0.$$

令 $a = \alpha^* A \alpha$, $b = \alpha^* B \alpha$, $c = \alpha^* C \alpha$, 则由 A, B, C 皆为正定矩阵知 $a > 0, b > 0, c > 0$, 且

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(6 分). 注意到, 当 $b^2 - 4ac \geq 0$ 时, $\sqrt{b^2 - 4ac} < b$, 从而

$$\operatorname{Re} \lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < 0;$$

(8 分). 当 $b^2 - 4ac < 0$ 时, $\sqrt{b^2 - 4ac} = i\sqrt{4ac - b^2}$, 从而 $\operatorname{Re} \lambda = -b/2a < 0$.
□

5: (10 分) 已知 $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$, $|x| < 1$, n 为正整数. 求 $\sum_{i=0}^{n-1} a_i$.

解答: 由于 $\sum_{i=0}^{n-1} a_i$ 恰为 $\frac{(1+x)^n}{(1-x)^3} \cdot \frac{1}{1-x}$ 展开式中 x^{n-1} 的系数 (2 分), 而

$$\frac{(1+x)^n}{(1-x)^4} = \frac{(2 - (1-x))^n}{(1-x)^4} = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i 2^{n-i} (1-x)^{i-4},$$

其 x^{n-1} 项系数等于

$$2^n(1-x)^{-4} - n2^{n-1}(1-x)^{-3} + \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}(1-x)^{-2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{6}2^{n-3}(1-x)^{-1}$$

的 x^{n-1} 项系数 (6 分), 也就等于

$$\begin{aligned} & \frac{2^n}{3!}((1-x)^{-1})''' - \frac{n2^{n-1}}{2!}((1-x)^{-1})'' \\ & + \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}((1-x)^{-1})' - \frac{n(n-1)(n-2)}{6}2^{n-3}(1-x)^{-1} \end{aligned}$$

的 x^{n-1} 项系数, 它等于

$$\frac{2^n}{3!}(n+2)(n+1)n - \frac{n2^{n-1}}{2!}(n+1)n + \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}n - \frac{n(n-1)(n-2)}{6}2^{n-3}.$$

故有

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i = \frac{n(n+2)(n+7)}{3}2^{n-4}$$

(10 分). $\square$

6: (15 分) 设 $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ 可微, $f(0) = f(1)$, $\int_0^1 f(x) dx = 0$, 且 $f'(x) \neq 1 \forall x \in [0, 1]$. 求证: 对任意正整数 n , 有 $\left| \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \frac{1}{2}$.

解答: 由于 $f(0) = f(1)$, 故存在 $c \in (0, 1)$ 使得 $f'(c) = 0$ (2 分). 又 $f'(x) \neq 1$, 由导函数介值性质恒有 $f'(x) < 1$ (4 分). 令 $g(x) = f(x) - x$, 则 $g(x)$ 为单调下降函数 (6 分). 故

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} + \frac{1}{n} &= \int_0^1 g(x) dx + \frac{1}{n} > \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n g\left(\frac{k}{n}\right) + 1 \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) > \int_0^1 g(x) dx = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

(12 分). 于是有

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \right| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{k}{n}\right) + \frac{n-1}{2} \right| < \frac{1}{2} \square$$

(15 分)

7: (25 分) 已知实矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & a \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & b \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. 证明:

(1) 矩阵方程 $AX = B$ 有解但 $BY = A$ 无解的充要条件是 $a \neq 2, b = 4/3$;

(2) A 相似于 B 的充要条件是 $a = 3, b = 2/3$;

(3) A 合同于 B 的充要条件是 $a < 2, b = 3$.

解答: (1) 矩阵方程 $AX = B$ 有解等价于 B 的列向量可由 A 的列向量线性表示, $BY = A$ 无解等价于 A 的某个列向量不能由 B 的列向量线性表示 (2 分). 对 (A, B) 作初等行变换:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & b \\ 2 & a & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & b \\ 0 & a-2 & -1 & 1-b \end{pmatrix}$$

知, B 的列向量组可由 A 的列向量线性表示当且仅当 $a \neq 2$ (6 分). 对矩阵 (B, A) 作初等行变换:

$$(B, A) = \begin{pmatrix} 4 & b & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & b & 2 & 2 \\ 0 & 1-3b/4 & 1/2 & a-3/2 \end{pmatrix}.$$

由此知 A 的列向量组不能由 B 的列向量线性表示的充要条件是 $b = 4/3$. 所以矩阵方程 $AX = B$ 有解但 $BY = A$ 无解的充要条件是 $a \neq 2, b = 4/3$ (10 分).

(2) 若 A, B 相似, 则有 $\text{tr}A = \text{tr}B$, 且 $|A| = |B|$, 故有 $a = 3, b = 2/3$ (12 分). 反之, 若 $a = 3, b = 2/3$, 则有

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 2/3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix},$$

A 和 B 的特征多项式均为 $\lambda^2 - 5\lambda + 2$. 由于 $\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$ 由两个不同的根, 从而 A, B 都可以相似于同一对角阵. 故 A 与 B 相似 (15 分).

(3) 由于 A 为对称阵, 若 A, B 合同, 则 B 也是对称阵, 故 $b = 3$ (16 分). 矩阵 B 对应的二次型

$$g(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 6x_1x_2 + x_2^2 = (3x_1 + x_2)^2 - 5x_1^2.$$

在可逆线性变换 $y_1 = 3x_1 + x_2, y_2 = x_1$ 下, $g(x_1, x_2)$ 变成标准型: $y_1^2 - 5y_2^2$ (18 分). 由此, B 的正, 负惯性指数为 1 (19 分). 类似地, A 对应的二次型

$$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + ax_2^2 = 2(x_1 + x_2)^2 + (a-2)x_2^2$$

在可逆线性变换 $z_1 = 3x_1 + x_2, z_2 = x_2$ 下 $f(x_1, x_2)$ 变成标准型: $2z_1^2 + (a-2)z_2^2$ (22 分). A, B 合同的充要条件是它们有相同的正、负惯性指数, 故 A, B 合同的充要条件是 $a < 2, b = 3$ (25 分) $\square$