

第三届全国大学生数学竞赛决赛试题参考解答 (数学类, 2012)

一、(本题 15 分) 设有空间中五点: $A(1, 0, 1)$, $B(1, 1, 2)$, $C(1, -1, -2)$, $D(3, 1, 0)$, $E(3, 1, 2)$. 试求过点 E 且与 A, B, C 所在平面 Σ 平行而与直线 AD 垂直的直线方程.

解: 平面 ABC 的法向量

$$\mathbf{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (0, 1, 1) \times (0, -1, -3) = (-2, 0, 0).$$

设所求直线的方向向量为 $\mathbf{l} = (a, b, c)$, 则由条件得

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{l} \cdot \overrightarrow{AD} = 0.$$

由此可解得 $\mathbf{l} = (0, c, c)$ ($c \neq 0$), 取 $\mathbf{l} = (0, 1, 1)$. 于是所求直线方程为

$$\frac{x-3}{0} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}.$$

二、(本题 15 分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上有两阶导数, 且 $f''(x)$ 在 $[a, b]$ 上黎曼可积, 证明:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)f''(t)dt, \quad \forall x \in [a, b].$$

证明 1: $\forall x \in [a, b]$, 利用 Newton-Leibniz 公式得

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + \int_a^x f'(u)du \\ &= f(a) + \int_a^x f'(a)du + \int_a^x du \int_a^u f''(t)dt \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x dt \int_t^x f''(t)du \\ &= f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)f''(t)dt. \end{aligned}$$

证明 2: $\forall x \in [a, b]$, 利用分部积分公式得

$$\begin{aligned} \int_a^x (x-t)f''(t)dt &= [(x-t)f'(t)] \Big|_{t=a}^{t=x} + \int_a^x f'(t)dt \\ &= -f'(a)(x-a) + f(x) - f(a), \end{aligned}$$

即

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)f''(t)dt.$$

三、(本题 10 分) 设 $k_0 < k_1 < \cdots < k_n$ 为给定的正整数, $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为实参数, 指出函数 $f(x) = \sin k_0 x + A_1 \sin k_1 x + \cdots + A_n \sin k_n x$ 在 $[0, 2\pi)$ 上零点的个数 (当 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 变化时) 的最小可能值并加以证明.

解: 当 $A_1 = A_2 = \cdots = A_n = 0$ 时, 函数 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi)$ 上恰有 $2k_0$ 个零点, 下面证明无论 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 取什么值, $f(x)$ 在 $[0, 2\pi)$ 上都至少有 $2k_0$ 个零点.

考虑函数

$$F_1(x) = -\frac{1}{k_0^2} \left(\sin k_0 x + \sum_{i=1}^n \frac{A_i k_0^2}{k_i^2} \sin k_i x \right).$$

易见

$$F_1(0) = F_1(2\pi) = 0, \quad F_1''(x) = f(x).$$

设 $F_1(x)$ 在 $[0, 2\pi)$ 上的零点个数为 N , 则由 Rolle 定理知 $F_1'(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上至少有 N 个零点, 从而 $F_1''(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上至少有 $N-1$ 个零点, 于是 $F_1''(x)$ 在 $[0, 2\pi)$ 上至少有 N 个零点. 记 $F_0(x) = f(x)$. 重复上面的过程, 得到一系列函数

$$F_s(x) = \frac{(-1)^s}{k_0^{2s}} \left(\sin k_0 x + \sum_{i=1}^n \frac{A_i k_0^{2s}}{k_i^{2s}} \sin k_i x \right),$$

满足 $F_{s+1}'(x) = F_s(x)$, $s = 0, 1, 2, \cdots$, 从而若 $F_s(x)$ 在 $[0, 2\pi)$ 上的零点个数为 N , 则 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi)$ 上的零点个数至少为 N .

令

$$g(x) = \sin k_0 x + \sum_{i=1}^n \frac{A_i k_0^{2s}}{k_i^{2s}} \sin k_i x,$$

则 $F_s(x) = \frac{(-1)^s}{k_0^{2s}} g(x)$. 由于 $k_0 < k_1 < \cdots < k_n$, 可取充分大的正整数 s , 使得

$$\sum_{i=1}^n \frac{|A_i| k_0^{2s}}{k_i^{2s}} < \frac{\sqrt{2}}{2},$$

从而有

$$\left| \sum_{i=1}^n \frac{A_i k_0^{2s}}{k_i^{2s}} \sin k_i x \right| \leq \sum_{i=1}^n \frac{|A_i| k_0^{2s}}{k_i^{2s}} < \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

因此当 $m = 1, 2, \cdots, 2k_0 - 1$ 时, 或者

$$g\left(\frac{m\pi + \frac{\pi}{4}}{k_0}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{|A_i| k_0^{2s}}{k_i^{2s}} > 0,$$

$$g\left(\frac{m\pi - \frac{\pi}{4}}{k_0}\right) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{|A_i| k_0^{2s}}{k_i^{2s}} < 0$$

成立, 或者

$$g\left(\frac{m\pi - \frac{\pi}{4}}{k_0}\right) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} - \sum_{i=1}^n \frac{|A_i| k_0^{2s}}{k_i^{2s}} > 0,$$

$$g\left(\frac{m\pi + \frac{\pi}{4}}{k_0}\right) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{|A_i|k_0^{2s}}{k_i^{2s}} < 0$$

成立. 不论何种情形, 都存在 $x_m \in \left(\frac{m\pi - \frac{\pi}{4}}{k_0}, \frac{m\pi + \frac{\pi}{4}}{k_0}\right)$, 使得 $g(x_m) = 0$, $m = 1, 2, \dots, 2k_0 - 1$. 由此可知, $F_s(x)$ 在 $[0, 2\pi)$ 上的零点个数 $N \geq 2k_0$, 故 $f(x)$ 零点个数的最小可能值为 $2k_0$.

四、(本题 10 分) 设正数列 a_n 满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} a_n < +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = 1.$$

求证: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 1$.

证明: 令 $x_n = \ln a_n$, 则由题设条件,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n < +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = 0.$$

首先假设所有的 $x_n \geq 0$. 由上面第二式可知存在 $A > 0$, 使得所有的 $x_n \leq A$. 易知当 $0 \leq x \leq \ln 2$ 时, 成立不等式 $e^x \leq 1 + 2x$.

对于固定的 n , 令

$$S_n = \{i \in \mathbb{Z} | 1 \leq i \leq n, x_i \leq \ln 2\}, \quad T_n = \{i \in \mathbb{Z} | 1 \leq i \leq n, x_i > \ln 2\},$$

则有

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \geq \frac{1}{n} \sum_{k \in T_n} x_k > \frac{|T_n|}{n} \ln 2 \geq 0,$$

因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|T_n|}{n} = 0$. 由于

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{x_k} &= \frac{1}{n} \sum_{k \in S_n} e^{x_k} + \frac{1}{n} \sum_{k \in T_n} e^{x_k} \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{k \in S_n} (1 + 2x_k) + \frac{|T_n|}{n} e^A \\ &\leq 1 - \frac{|T_n|}{n} (1 - e^A) + \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \end{aligned}$$

并且

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{x_k} \geq e^{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k},$$

由夹逼准则得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{x_k} = 1.$$

对于一般情形, 作数列

$$z_n = \begin{cases} -x_n, & x_n < 0 \\ 0, & x_n \geq 0 \end{cases}, \quad n = 1, 2, \dots$$

则 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$. 令 $y_n = x_n + z_n$, 则 $y_n \geq 0$, 且

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0, \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n < +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k = 0.$$

由上面已证的结论, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{y_k} = 1$. 又因为 $z_n \geq 0$, 从而 $x_n \leq y_n$, 于是有

$$e^{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{x_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{y_k},$$

再次由夹逼准则, 得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{x_k} = 1.$$

五、(本题 15 分) 设 A, B 分别是 3×2 和 2×3 实矩阵, 若 $AB = \begin{pmatrix} 8 & 0 & -4 \\ -\frac{3}{2} & 9 & -6 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

求 BA .

解: 易知 AB 的特征多项式为 $\lambda(\lambda - 9)^2$. 由于 AB 和 BA 有相同的非零特征值 (并且重数也相同), 可知 BA 的特征值均为 9. 由此可知 BA 可逆, 即存在 2 阶矩阵 C , 使得 $CBA = BAC = I_2$. AB 的最小多项式为 $\lambda(\lambda - 9)$, 从而

$$A(BA - 9I_2)B = ABAB - 9AB = AB(AB - 9I_3) = 0,$$

于是有

$$BA - 9I_2 = CB \cdot A(BA - 9I_2)B \cdot AC = 0,$$

即

$$BA = 9I_2 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

六、(本题 20 分) 设 $\{A_i\}_{i \in I}, \{B_i\}_{i \in I}$ 是数域 F 上两个矩阵集合, 称它们在 F 上相似: 如果存在 F 上与 $i \in I$ 无关的可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}A_iP = B_i, \forall i \in I$. 证明: 有理数域 $\mathbb{Q}$ 上两个矩阵集合 $\{A_i\}_{i \in I}, \{B_i\}_{i \in I}$, 如果它们在实数域 $\mathbb{R}$ 上相似, 则它们在有理数域 $\mathbb{Q}$ 上也相似.

证明: $\forall i \in I$, 考虑 $M_n(\mathbb{R})$ 的子空间 $U_{i,\mathbb{R}} = \{T \in M_n(\mathbb{R}) | A_iT = TB_i\}$ 以及 $M_n(\mathbb{Q})$ 的子空间 $U_{i,\mathbb{Q}} = \{T \in M_n(\mathbb{Q}) | A_iT = TB_i\}$, 其中 $M_n(\mathbb{R})$ 和 $M_n(\mathbb{Q})$ 分别表示实数域 $\mathbb{R}$ 和有理数域 $\mathbb{Q}$ 上全体 n 阶矩阵构成的向量空间. 令

$$U_{\mathbb{R}} = \bigcap_{i \in I} U_{i,\mathbb{R}}, \quad U_{\mathbb{Q}} = \bigcap_{i \in I} U_{i,\mathbb{Q}},$$

由题意知 $U_{\mathbb{R}} \neq 0$. 由于所涉及到的向量空间的维数都不超过 n^2 , 因此 $U_{\mathbb{R}}$ 与 $U_{\mathbb{Q}}$ 实际上都只能是有限个 $U_{i,\mathbb{R}}$ 和 $U_{i,\mathbb{Q}}$ 的交集. 求 $U_{i,\mathbb{R}}$ 与 $U_{i,\mathbb{Q}}$ 的基底实际上就是解线性方程组 (这些方程组都是由 $A_iT = TB_i$ 给出的), 并且求它们基础解系的步骤相同, 因此可以取到一组公共基底, 设为 $T_1, T_2, \dots, T_l$. 考虑多项式

$$f(t_1, t_2, \dots, t_l) = \det \left(\sum_{k=1}^l t_k T_k \right),$$

由 $U_{\mathbb{R}} \neq 0$ 可知, 存在一组实数 $s_1, s_2, \dots, s_l$ 满足 $f(s_1, s_2, \dots, s_l) \neq 0$, 从而可知 f 作为 $\mathbb{Q}$ 上的多项式不是零多项式, 因此存在一组有理数 $r_1, r_2, \dots, r_l$ 使得 $f(r_1, r_2, \dots, r_l) \neq 0$, 此时矩阵 $P = \sum_{k=1}^l r_k T_k \in U_{\mathbb{Q}}$ 且可逆, 即 $\forall i \in I$, 都有 $P^{-1}A_iP = B_i$.

七、(本题 15 分) 设 $F(x), G(x)$ 是 $[0, +\infty)$ 上的两个非负单调递减函数,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x(F(x) + G(x)) = 0.$$

(i) 证明: $\forall \varepsilon > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\varepsilon}^{+\infty} xF(xt) \cos t dt = 0$.

(ii) 若进一步有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} (F(t) - G(t)) \cos \frac{t}{n} dt = 0,$$

证明:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} (F(t) - G(t)) \cos(xt) dt = 0.$$

证明: (i) 由条件可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} xF(x) = 0$, 从而 $\forall \varepsilon > 0$,

$$\left| \int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} xF(xt) \cos t dt \right| \leq xF(\alpha x) \int_{\alpha}^{\beta} |\cos t| dt \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty,$$

其中 $\alpha = \min \left\{ \varepsilon, \frac{\pi}{2} \right\}$, $\beta = \max \left\{ \varepsilon, \frac{\pi}{2} \right\}$. 因此下面只需证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} xF(xt) \cos t dt = 0.$$

由 Dirichlet 判别法可知这个反常积分收敛. 将这个积分作如下变形:

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} xF(xt) \cos t dt &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2}+k\pi}^{\frac{\pi}{2}+(k+1)\pi} xF(xt) \cos t dt \\ &= x \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} F(x(t+k\pi)) \cos t dt. \end{aligned}$$

这是一个收敛的交错级数, 因此

$$\left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} xF(xt) \cos t dt \right| \leq x \left| \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} F(xt) \cos t dt \right| \leq 2xF\left(\frac{\pi x}{2}\right) \rightarrow 0, \quad x \rightarrow +\infty,$$

于是得到

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} xF(xt) \cos t dt = 0.$$

(ii) 只需考虑 $x \rightarrow 0+$ 的情形, 这等价于证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} x(F(xt) - G(xt)) \cos t dt = 0.$$

由 (i) 的结论, 这又只需证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\varepsilon_0} x(F(xt) - G(xt)) \cos t dt = 0,$$

其中 $0 < \varepsilon_0 \leq \frac{\pi}{2}$.

下面先证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\varepsilon_0} n(G(nt) - G((n+1)t)) \cos t dt = 0.$$

事情上,

$$\begin{aligned} &\int_0^{\varepsilon_0} n(G(nt) - G((n+1)t)) \cos t dt \\ &= \int_0^{n\varepsilon_0} G(u) \cos \frac{u}{n} du - \frac{n}{n+1} \int_0^{(n+1)\varepsilon_0} G(u) \cos \frac{u}{n+1} du \\ &= \frac{1}{n+1} \int_0^{n\varepsilon_0} G(u) \cos \frac{u}{n} du + \frac{n}{n+1} \int_0^{n\varepsilon_0} G(u) \left(\cos \frac{u}{n} - \cos \frac{u}{n+1} \right) du \\ &\quad - \frac{n}{n+1} \int_{n\varepsilon_0}^{(n+1)\varepsilon_0} G(u) \cos \frac{u}{n+1} du \\ &= I_1 + I_2 - I_3, \end{aligned}$$

而由题设条件可知 $\lim_{x \rightarrow +\infty} xG(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$, 从而有

$$\begin{aligned}
|I_1| &= \frac{1}{n+1} \int_0^{n\varepsilon_0} G(u) \cos \frac{u}{n} du \leq \int_0^{\varepsilon_0} G(nu) \cos u du \\
&= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} G(nu) \cos u du + \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\varepsilon_0} G(nu) \cos u du \\
&\leq \frac{G(0)}{\sqrt{n}} + G(\sqrt{n}) \int_{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\varepsilon_0} \cos u du \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty; \\
|I_2| &= \frac{n}{n+1} \sum_{k=1}^n \int_{(k-1)\varepsilon_0}^{k\varepsilon_0} G(u) \left(\cos \frac{u}{n+1} - \cos \frac{u}{n} \right) du \\
&\leq \frac{n}{n+1} \sum_{k=1}^n G((k-1)\varepsilon_0) \int_{(k-1)\varepsilon_0}^{k\varepsilon_0} \frac{u}{n(n+1)} du \quad (\text{Lagrange 中值定理}) \\
&= \frac{\varepsilon_0}{(n+1)^2} \sum_{k=1}^n (k-1)\varepsilon_0 G((k-1)\varepsilon_0) + \frac{\varepsilon_0^2}{2(n+1)^2} \sum_{k=1}^n G((k-1)\varepsilon_0) \\
&\leq \frac{n\varepsilon_0}{(n+1)^2} \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (k-1)\varepsilon_0 G((k-1)\varepsilon_0) + \frac{n\varepsilon_0^2 G(0)}{2(n+1)^2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty; \\
|I_3| &= n \int_{\frac{n\varepsilon_0}{n+1}}^{\varepsilon_0} G((n+1)u) \cos u du \leq nG(n\varepsilon_0) \int_{\frac{n\varepsilon_0}{n+1}}^{\varepsilon_0} \cos u du \\
&\leq \frac{n\varepsilon_0 G(n\varepsilon_0)}{n+1} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,
\end{aligned}$$

于是得到

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\varepsilon_0} n(G(nt) - G((n+1)t)) \cos t dt = 0. \quad (*)$$

现在用类似于估计 I_1 的方法易知

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{\varepsilon_0} (F(xt) - G(xt)) \cos t dt = 0,$$

从而只需证明

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x] \int_0^{\varepsilon_0} (F(xt) - G(xt)) \cos t dt = 0,$$

这里 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 记 $[x] = n$, 由 $F(x), G(x)$ 的非负递减性, 以及 $n \leq x < n+1$, 可得

$$\begin{aligned}
&n \int_0^{\varepsilon_0} (F(xt) - G(xt)) \cos t dt \\
&\leq n \int_0^{\varepsilon_0} (F(nt) - G(nt)) \cos t dt + n \int_0^{\varepsilon_0} (G(nt) - G((n+1)t)) \cos t dt, \\
&n \int_0^{\varepsilon_0} (F(xt) - G(xt)) \cos t dt \\
&\geq n \int_0^{\varepsilon_0} (F((n+1)t) - G((n+1)t)) \cos t dt - n \int_0^{\varepsilon_0} (G(nt) - G((n+1)t)) \cos t dt,
\end{aligned}$$

而由题设条件可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{+\infty} (F(nt) - G(nt)) \cos t dt = 0,$$

再由 (i) 的结论得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^{\varepsilon_0} (F(nt) - G(nt)) \cos t dt = 0,$$

结合 (*) 式, 由夹逼准则得

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} n \int_0^{\varepsilon_0} (F(xt) - G(xt)) \cos t dt = 0.$$