

第二届全国大学生数学竞赛决赛试卷

（数学类，2011 年 3 月）

考试形式： 闭卷 考试时间： 150 分钟 满分： 100 分.

题号	一	二	三	四	五	六	总分
满分	15	15	15	15	20	20	100
得分							

- 注意：**1、所有答题都须写在此试卷纸密封线右边，写在其他纸上一律无效.
 2、密封线左边请勿答题，密封线外不得有姓名及相关标记.
 3、如当题空白不够，可写在当页的背面，并标明题号.

得 分	
评阅人	

一、(本题 15 分) 求出过原点且和椭球面 $4x^2 + 5y^2 + 6z^2 = 1$ 的交线为一个圆周的所有平面.

得 分	
评阅人	

二、(本题 15 分) 设 $0 < f(x) < 1$, 无穷积分 $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ 和 $\int_0^{+\infty} xf(x)dx$ 都收敛. 求证: $\int_0^{+\infty} xf(x)dx > \frac{1}{2} \left(\int_0^{+\infty} f(x)dx \right)^2$.

得 分	
评阅人	

三、(本题 15 分) 设 $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n$ 收敛, $t_n = a_{n+1} + 2a_{n+2} + \cdots + ka_{n+k} + \cdots$.

证明: $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 0$.

得 分	
评阅人	

四、(本题 15 分) 设 $A \in M_n(\mathbb{C})$, 定义线性变换 $\sigma_A: M_n(\mathbb{C}) \rightarrow M_n(\mathbb{C})$, $\sigma_A(X) = AX - XA$. 证明: 当 A 可对角化时, σ_A 也可对角化. 这里 $M_n(\mathbb{C})$ 是复数域 $\mathbb{C}$ 上 n 阶方阵组成的线性空间.

得 分	
评阅人	

五、(本题 20 分) 设连续函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足 $\sup_{x, y \in \mathbb{R}} |f(x+y) - f(x) - f(y)| < +\infty$. 证明: 存在实常数 a 满足

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x) - ax| < +\infty.$$

得 分	
评阅人	

六、(本题 20 分) 设 $\varphi: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ 是非零线性映射, 满足

$$\varphi(XY) = \varphi(YX), \quad \forall X, Y \in M_n(\mathbb{R}),$$

这里 $M_n(\mathbb{R})$ 是实数域 $\mathbb{R}$ 上

n 阶方阵组成的线性空间. 在 $M_n(\mathbb{R})$ 上定义双线性型 $(-, -): M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

如下: $(X, Y) = \varphi(XY)$.

(1) 证明 $(-, -)$ 是非退化的, 即若 $(X, Y) = 0, \forall Y \in M_n(\mathbb{R})$, 则 $X = 0$.

(2) 设 $A_1, \dots, A_{n^2}$ 是 $M_n(\mathbb{R})$ 的一组基, $B_1, \dots, B_{n^2}$ 是相应的对偶基. 即

$$(A_i, B_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{当 } i \neq j \\ 1, & \text{当 } i = j \end{cases}. \text{ 证明 } \sum_{i=1}^{n^2} A_i B_i \text{ 是数量矩阵.}$$